المحاضرة الثانية

مفهوم المتغيرة العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي

تعريف المتغيرة العشوائية المستمرة
التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة
خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة
دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة
قاعدة لايبنيتز

تعريف المتغيرة العشوائية المستمرة

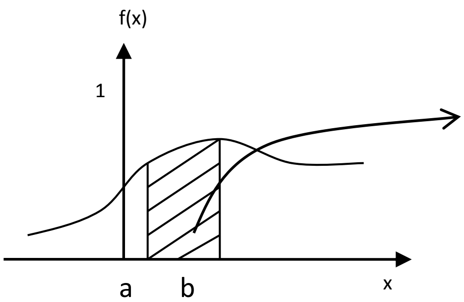
هي متغيرة ع تأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هي تأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغيرة الميتمرة تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر. $P(X=x) \rightarrow 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.

$$\boxed{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx}$$



رسم1 التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغيرة العشوائية المستمرة

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغيرة ع المتقطعة.

خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للم ع المستمرة تكتب كما يلي :

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور الم ع، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من ١ إلى ٢.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من ١ إلى ٢.

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & 0<x<3 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{3} Cx^2dx+\int_{3}^{+\infty} 0dx=1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9C=1=>C=1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون C = 1/9 .

$$P(1<x\le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (1/9)x^2dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right]=\frac{7}{27}$$

$$P(1>x>2)=1-P(1<x<2)=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$$

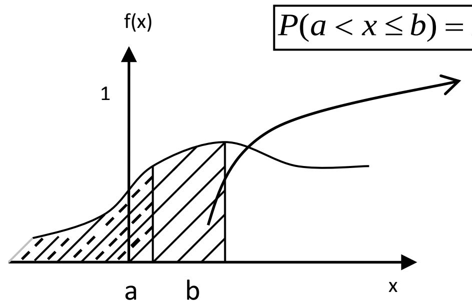
دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :

$$\boxed{P(a<x\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)=F(b)-F(a)}$$



رسم 2 حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*x<0: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du=0$$

$$*0\le x<3: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_0^x \frac{1}{9}u^2du=\frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x=\frac{x^3}{27}$$

$$*x\ge 3: \qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du=\int_{-\infty}^{0} 0du+\int_0^3 \frac{1}{9}u^2du+\int_3^x 0du=0+\frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3+0=\frac{27}{27}=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^3/27 & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}\qquad P(1<x\le 2)=F(2)-F(1)=\frac{2^3}{27}-\frac{1^3}{27}=\frac{7}{27}$$

قاعدة لايبنيز Règle de LEIBNITZ

تفيد هذه القاعدة الرياضية العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة:

$$\boxed{\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(u)du}{dx}=f(x)\Rightarrow\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$$

مثال: أوجد دالة الكثافة للمتغيرة X إذا كانت دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$*\,x<0: f(x)=F'(x)=(0)'=0$$

$$*\,x\ge 0: F(x)=1-e^{-2x}\Rightarrow f(x)=\left(1-e^{-2x}\right)'=2e^{-2x}$$

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

خلاصة المبحث الأول و الثاني

يتم تعريف التوزيع الاحتمالي (أو القانون الاحتمالي) لمتغيرة عشوائية من خلال تحديد القيم الممكنة للمتغيرة و الاحتمالات المقابلة لها.

يتم هذا التحديد إما من خلال جدول (جدول التوزيع الاحتمالي) أو دالة، تسمى دالة كثافة الاحتمالية.

لكي نقول عن دالة ما أنها دالة كثافة احتمالية يجب أن تكون موجبة دوما و أن يكون مجموع الاحتمالات مساويا للواحد.

الدالة التجميعية (أو دالة التوزيع) تمثل احتمال مجال من أصغر قيمة للمتغيرة إلى نقطة ما:

$F(x)=P(X\le x)=\sum_{u\le x} f(u)$ في حالة م متقطعة و $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$ في حالة م مستمرة.

نظرا لتعريفها تأخذ دالة التوزيع مسارا متزايدا (أو ثابتا على أجزاء من المجال). تبرز أهمية الدالة التجميعية أكثر عندما تكون المتغيرة مستمرة لأننا نهتم حينها باحتمالات مجالات. يمكن استنتاج دالة الكثافة من خلال اشتقاق دالة التوزيع.